Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2003

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR— Primer parcial , 2003 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Se corregirá sobre 4 ejercicios elegidos por usted.

1. Considere el sistema

$$\begin{cases} \xi & - & \eta & + & 2\zeta & = 1 \\ 5\xi & + & \eta & + & 4\zeta & = 2 \\ 2\xi & + & \eta & + & \zeta & = 0\,. \end{cases}$$

Ponemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\ , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   a) ¿Tiene solución?

   b) Determine la imagen $S \subset \mathbb{R}^3$ de la función lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y calcule la proyección ortogonal v de b sobre S .

   c) Resuelva el sistema $Ax = v$.

   d) Demuestre que dist $(Ax, b) \geq$ dist (v, b) para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Sea E el espacio vectorial de polinomios:

$$E = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 / \alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Consideramos las bases

$$\begin{array}{lllll} P & : & p_1 = 1, \ \ p_2 = x, & p_3 = x^2, & p_4 = x^3 \\ Q & : & q_1 = 1, \ \ q_2 = x - 1, & q_3 = (x-1)^2, & q_4 = (x-1)^3 \end{array}$$

para E . Finalmente sea $T : E \to E$ dada por $T(p(x)) = \dfrac{d}{dx}(xp(x))$.

   a) Encuentre la matriz de T cuando en su dominio se toma la base P y en su codominio se considera la base Q .

   b) ¿Es T inversible? En caso afirmativo encuentre la matriz de la inversa en las bases dadas.

   c) Encuentre una función derivable $f(x)$ tal que $xf'(x) + f(x) = 1 + x$.

3. Sean $x = (\xi_i, \ldots, \xi_n),\ \eta = (\eta_1 \ldots, \eta_n)$ vectores arbitrarios de $\mathbb{R}^n$.
   Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real $n \times n$ tal que

   i.) $a_{ij} = a_{ji}$

   ii.) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geq 0$ y sólo es 0 si x=0 .

   a) Demuestre que
   $$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \eta_j\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \eta_i\, \eta_j\right) .$$

   b) Demuestre que para cada i, j
   $$(a_{ij})^2 \leq a_{ii}\, a_{jj}$$

4. Sea $f : E \to E$ una función lineal tal que $f^2 = f$.
   Demuestre que traza f es un número natural y relacione este número con dim (Im f) .

5. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = (\overline{A})^t$ coincide con A .

   a) Demuestre que sus autovalores son reales.

   b) Demuestre que si $Ax = \lambda x$ y $Ay = \mu y$ y si $\lambda \neq \mu$ entonces x e y son ortogonales.
   Sugerencia: Pruebe primero que
   $$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$$
   donde $\langle , \rangle$ es el producto interno canónico de $\mathbb{C}^n$.

   c) Concluya que si todos los autovalores de A son diferentes, entonces A se diagonaliza en una base ortonormal.

6. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nilpotente.

   a) Demuestre que hay una base x_1, x_2, x_3 de $\mathbb{R}^3$ tal que
   $$Ax_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{o bien} \\ 0 & \end{cases} ,\quad y Ax_3 = 0 .$$

   b) ¿Cómo luce la matriz de A en esta base?